Vaihtoehtoinen määritelmä luokalle NP [Sipser s. 269–271]

(Ei kuulu koealueeseen.)

Luennolla luokka NP määriteltiin koostuvaksi kielistä, jotka voidaan tunnistaa polynomisessa ajassa toimivalla epädeterministisellä Turingin koneella. Näemme nyt vaihtoehtoisen määritelmän, joka voi helpottaa asian ymmärtämistä.

Olkoon A aakkoston Σ^* formaali kieli. Kielen A tarkastaja on deterministinen Turingin kone, joka saa syötteenä merkkijonoja $\langle w, c \rangle$, missä $w \in \Sigma^*$ ja $c \in \Sigma^*$, ja toteuttaa seuraavan ehdon:

- jos $w \in A$, niin on olemassa sellainen c, että V hyväksyy merkkijonon $\langle w, c \rangle$
- jos $w \notin A$, niin kaikilla $c \in \Sigma^*$ kone V hylkää merkkijonon $\langle w, c \rangle$.

Jos lisäksi V toimii parametrin $|w|$ suhteen polynomisessa ajassa, se on kielen A polynominen tarkastaja.

Esimerkki Tarkastellaan tunnettua luokkaan NP kuuluvaa Hamiltonin polku -ongelmaa (luennot s. 279)

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{verkossa } G \text{ on Hamiltonin polku } s \rightsquigarrow t \}.$$

Ongelmalla *HAMPATH* on polynominen tarkastaja, joka syötteellä $\langle \langle G, s, t \rangle, c \rangle$ toimii seuraavasti:

Jos c on sellainen jono verkon G solmuja, että

- jokainen solmu esiintyy tasan kerran
- ensimmäinen solmu on s ja viimeinen t ja
- kahden peräkkäisen solmun välillä on aina kaari

niin hyväksy; muuten hylkää.

Nimittäin jos $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH$, niin V hyväksyy syötteen $\langle \langle G, s, t \rangle, c \rangle$, missä c on luettelo jonkin Hamiltonin polun solmuista. Jos taas $\langle G, s, t \rangle \notin HAMPATH$, niin Hamiltonin polkua ei ole, eikä mikään solmujono c siis voi toteuttaa V:n hyväksymisehtoa. Selvästi V:lle riittää polynominen aikavaativuus. $\square$

Edellä esitetystä polynomisesta tarkastajasta V saadaan helposti polynomisessa ajassa toimiva epädeterministinen Turingin kone N kielelle $HAMPATH$. Syötteellä $\langle G, s, t \rangle$ kone N toimii seuraavasti:

1. Tuota epädeterministisesti jono c, jossa on tasan n verkon G solmua, missä n on solmujen lukumäärä.

2. Simuloi konetta V syötteellä $\langle \langle G, s, t \rangle, c \rangle$. Hyväksy, jos V hyväksyisi, muuten hylkää.

Lopputuloksena saatu N on oleellisesti sama kone, kuin jolla osoitimme ongelman $HAMPATH$ kuulumisen luokkaan NP (luennot s. 280).

Tämä voidaan yleistää:

Lause Jos kielellä A on polynominen tarkastaja, niin $A \in$ NP.

Todistus Olkoon V kielen A polynominen tarkastaja. Olkoot a ja k sellaiset, että syötteellä $\langle w, c \rangle$ koneen V aikavaativuus on korkeintaan $a|w|^k$. Olkoon N epädeterministinen Turingin kone, joka syötteellä w toimii seuraavasti:

- Valitse epädeterministisesti merkkijono c, jonka pituus on korkeintaan $a|w|^k$.
- Simuloi konetta V syötteellä $\langle w, c \rangle$. Hyväksy, jos V hyväksyisi, muuten hylkää.

Jos V hyväksyy jonkin merkkijonon $\langle w, c \rangle$, niin V erityisesti hyväksyy jonkin merkkijonon $\langle w, c \rangle$ jossa $|c| \leq a|w|^k$, sillä aikavaativuuden takia koneen V laskentaan ehtii vaikuttaa korkeintaan merkkijonon c ensimmäiset $a|w|^k$ merkkiä.

Siis N tunnistaa kielen A ja toimii polynomisessa ajassa, joten $A \in$ NP. $\square$

Myös käänteinen suunta pätee:

Lause Jos $A \in \mathrm{NP}$, niin kielellä A on polynominen tarkastaja.

Todistus Olkoon N epädeterministinen Turingin kone, joka tunnistaa kielen A ajassa an^k. Voidaan olettaa aakkosto Σ valituksi siten, että millään tilanteella ei ole enempää kuin $|\Sigma|$ mahdollista seuraajaa. Muodostetaan deterministinen kone V, joka syötteellä $\langle w, c \rangle$ toimii seuraavasti:

1. Simuloi konetta N syötteellä w. Jokaisella laskenta-askelella jos seuraajatilanne ei ole yksikäsitteinen (ts. pitäisi tehdä epädeterministinen valinta), ota merkkijonosta c seuraava merkki ja päätä sen perusteella, mikä vaihtoehto valitaan.

2. Jos laskenta johtaa hyväksyvään tilaan, niin hyväksy; muuten hylkää.

Jos koneella N syötteellä w on hyväksyvä laskenta, niin jokin c koodaa tämän laskennan sisältämät valinnat. Jos hyväksyvää laskentaa ei ole, niin kääntäen V ei voi hyväksyä millään c. Siis V on polynominen tarkastaja. $\square$

Olemme todenneet seuraavan:

Korollaari Kieli A kuuluu luokkaan NP, jos ja vain jos kielellä A on polynominen tarkastaja. $\square$

Tällä kurssilla oli luontevaa lähestyä luokkaa NP epädeterministisistä Turingin koneista lähtien, koska epädeterminismi on oleellisessa roolissa kurssin muissakin osissa.

Käytännön algoritmiikan kannalta epädeterministinen Turingin kone ei välttämättä ole erityisen luonteva laskennan malli. Tarkastajaan perustuva määritelmä tuo hyvin esille luokan NP ongelmien algoritmisen perusolemuksen:

- Ongelmille tunnetaan tehokas tapa tarkastaa, onko jokin ehdotettu ratkaisu oikea.
- Mahdollisia ratkaisuja on kuitenkin eksponentiaalinen määrä, eikä tunneta keinoa löytää niiden joukosta se, joka kannattaisi tarkastaa.